О становлении грамматических категорий языка логики предикатов[1]

Шиян Т.А. О становлении грамматических категорий языка логики предикатов // Логика, язык и формальные модели. Сб. статей / Под ред. Е.Н. Лисанюк, И.Б. Микиртумова, Ю.Ю. Черноскутова. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012.

E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

On the Making of Grammatical Categories of the Predicate Logic Language

Abstract. This paper represents the approach for the history of mathematical logic which contrasts with the logic mathematization attempts history and treats it as a history of the making and of the developing inside mathematic such concepts and notations which had been used for constructing the predicate logic. The paper substantiates the necessity of the distinction between variables and parameters and studies the history of the making of the distinction as well as the mathematical single symbols appearance. It is considered in the paper the making of symbolic notations for mathematical operations, the forming of function concept and of meanings for generalized marking for functions. It is briefly considered the making of symbolic notations for mathematical relations and marked some ways of the predicate concept forming. The paper pays any attention to the making of the first symbolic notations for logical connectives and the forming modern conception for quantification.

Key word: history of logic, history of mathematic, Modern time, mathematical logic, symbolic logic, logic of predicates, mathematical symbolism, mathematical notations, semiotics, variable, parameter, function, predicate, quantifier, logical connective.

Резюме. В статье предлагается подход к истории становления символической логики, рассматривающий ее не как историю попыток математизации логики, а как историю возникновения и развития в рамках математики тех понятий и обозначений, которые в дальнейшем были использованы (и используются до сих пор) для построения языка логики предикатов. Обосновывается необходимость различения переменных и параметров как разных видов знаков и рассматривается история формирования этого различения и появления символьных обозначений для индивидных знаков. Рассматривается возникновение символьных обозначений математических операций, формирование понятия функции и способов обобщенного представления функций. Кратко рассматривается возникновение символьных обозначений математических отношений, и намечаются некоторые пути формирования понятия предиката. Уделяется некоторое внимание вопросам о возникновении первых символьных обозначений логических связок и о формировании современных представлений о квантификации.

Ключевые слова: история логики, история математики, Новое время, математическая логика, символическая логика, логика предикатов, математическая символика, математические обозначения, семиотика, переменная, параметр, функция, предикат, квантор, логическая связка.

1. Введение

По мнению автора, именно логика предикатов и ее применение к исследованию и моделированию математических рассуждений стало в нач. XX в. тем знаниевым ядром, вокруг которого произошла консолидация до этого разрозненных логико-математических исследований и институционализация символической логики в самостоятельную математическую дисциплину. При этом, относительно незначительные упоминания об истории логики предикатов освещают появление ее первых аксиоматик и варианты используемых теми или иными авторами логических обозначений. Вопрос об истории появления и развития используемых в логике предикатов типов знаков, соответствующих им понятий и способов обозначения, насколько я знаю, в обзорных работах по истории логики не рассматривался. На мой взгляд, это является важным упущением для истории научной дисциплины, в которой построение символьных конструкций и манипулирование ими является не только основным инструментом, но и основным объектом исследования. Возможно, что за этим невниманием стоит неявное принятие предпосылки об априорности, той или иной преданности типов математических знаков и соответствующих им понятий.

Математическая символика существовала не всегда, как и выделение таких типов знаков, как константы, переменные, параметры. Не всегда выделялись такие объекты мысли, как индивиды, функции, предикаты и логические связки. Даже в наши дни далеко не все логики и математики различают достаточно точно соответствующие категории знаков. Значит, если не предполагать некоторой априорности типологии математических знаков (против чего можно привести и чисто математические возражения) или наличия некоторой телеологии в историческом развитии математики, или чего-то подобного, то можно предполагать возможность, что развитие математических категорий и знаков могло бы пойти иным путем. Из этого следует, что процесс появления и развития соответствующих знаковых и объектных категорий является существенной компонентой истории математики и символической логики (логики предикатов, в частности).

Настоящая статья является попыткой хотя бы частично заполнить существующие в этом вопросе пробелы. Из-за обширности темы я ограничусь здесь рассмотрением только дескриптивных знаков.

2. Типология математических знаков

Знаки в математике можно разделить на знаки конкретных объектов, переменные и параметры (обобщенные знаки конкретных объектов, обладающие признаками, как переменных, так и констант). Авторы статьи о математических знаках в «Математической энциклопедии»[1], как и многие другие логики и математики[2], не различают обычные переменные и параметры в качестве разных семиотических категорий и относят параметры к переменным. На мой взгляд, это не соответствует ни современной логической практике, ни многовековой традиции математических обозначений. С одной стороны, хотя параметры и являются знаками с переменной денотацией (кстати, таковыми являются даже обычные личные имена), но их функционирование отличается от функционирования обычных «переменных»: в рамках той или иной задачи они считаются постоянными, «известными» знаками. Более того, вопреки утверждению Колмогорова в упомянутой словарной статье, именно в символической логике наиболее бросается в глаза отличие параметров от переменных: при задании абстрактных логических языков именно параметры постулируются в качестве индивидных, функциональных или предикатных констант. Таким образом,

[1] *Башмакова И. Г., Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П.* Знаки математические // Математическая энциклопедия / Под ред. *И. М. Виноградова*. В 4-х тт. Т. 2. М., 1979. С. 458–463. В несколько сокращенном виде она же: Математические знаки // Математический энциклопедический словарь / Под ред. *Ю. В. Прохорова*. М., 1995. Ст. 457–463.

[2] Например, Фреге в «Исчислении понятий, или подражающем арифметике формальном языке чистого мышления» (*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*), изданном в 1879 г. (рус. изд.: *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. Сборник трудов / Пер. с нем. *Б. В. Бирюкова* / Под ред. *З. А. Кузичевой* / Коммент. *Б. В. Бирюкова, З. А. Кузичевой*. М., 2000. С. 65–142). А также переводчики и комментаторы указанного русского издания работ Фреге.

параметры являются смешенным типом знаков, не сводимым ни к обычным «переменным», ни к обычным «константам». С другой стороны, после введения Виетом и Декартом специальных отдельных обозначений для переменных (x, y, z, …) и параметров (a, b, c, …), в семиотической практике алгебры эти типы знаков вполне различаются и не смешиваются, что является достаточным основанием выделить знаки параметров в отдельную категорию математических знаков.

Во-вторых, по типу обозначаемого объекта мы выделяем знаки «индивидов» (нашей предметной области), функций, отношений, а также знаки логических связок и кванторы.

Для наглядности построим следующую табличную классификацию. Значком «+» в подколонках «мат.» отмечены типы знаков, вошедших в математический обиход вне попыток математизации логики; значком «(+)» – типы знаков, использовавшихся отдельными авторами. Значком «+» в подколонках «лог.» отмечены типы знаков стандартного абстрактного первопорядкового языка логики предикатов; значком «(+)» – типы знаков, использующихся только во второпорядковых языках.

Таблица 1. Типы знаков в классической алгебре и в типичном абстрактном первопорядковом языке логики предикатов.

типы знаков:	**постоянные**		**параметры**		**переменные**	
	мат.	лог.	мат.	лог.	мат.	лог.
индивиды	+		+	+	+	+
функции	+		+	+		(+)
предикаты	+			+		(+)
связки	(+)	+				
кванторы		+				

Рассмотрим теперь историю появления некоторых из этих типов знаков, используемых в логике и математике.

3. Знаки для обозначения индивидов

Первым из появившихся типов математических знаков были постоянные знаки конкретных индивидов – цифры. Появление письменных систем счисления связано с развитием систем письма и рассматриваться нами не будет. Согласно статье «Знаки математические»[1], первые знаки для произвольных величин появляются в Древней Греции в V–IV вв. до н. э. Сложно указать, кому принадлежало это новшество, но Аристотель уже широко применял буквенные обозначения, как в качестве терминов атрибутивных суждений (в Первой и второй аналитиках[2]), так и для обозначения геометрических и физических величин (в Физике[3]). Поскольку логические работы Аристотеля были созданы еще в Академии, при жизни Платона[4], то получаем дату – ранее 347 г. до н. э. Способ употребления букв Аристотелем в «Аналитиках» – как некоторых «известных», хоть и произвольных терминов – подталкивает нас к трактовке их как параметров. Это же относится и к «Началам» Евклида (кон. IV в. до н. э.), который обозначал с помощью букв точки и отрезки, а через них – и другие геометрические «величины»[5]. В случае «Начал» эти обозначения следует признать

---

[1] *Башмакова И. Г., Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П.* Знаки… С. 458–463.

[2] *Аристотель*. Сочинения в 4-х тт. Т. 2. М., 1978. С. 117–254, 255–346.

[3] Там же. Т. 3. М., 1981. С. 59–262.

[4] *Шичалин Ю. А.* История античного платонизма в институциональном аспекте. М., 2000. С. 39, 178–179.

[5] *Евклид*. Начала. В 3-х тт. / Пер. с греч. и коммент. *Д. Д. Мордухай-Болтовского* при ред. участии *М. Я. Выгодского, И. Н. Веселовского*. М. – Л., 1948–1950.

параметрами, поскольку в рамках каждого случая (формулировки и разбора некоторой теоремы, например) те или иные буквы обозначают одни и те же точки или отрезки, ситуативно являются их именами, но от случая к случаю денотаты этих обозначений меняются.

С Диофантом Александрийским связывается отход от геометрической интерпретации арифметики и начало использования сокращений вместо полных словесных записей арифметических выражений. В частности, считается, что Диофант уже использовал понятие неизвестного числа: «Не получившее никакого из этих названий, но состоящее из неопределенного количества единиц называется числом, и его знаком будет ς»[1]. Такая трактовка дается и в цитированном русскоязычном издании, и в латинском тексте критического двуязычного здания Таннери[2]: греческая «ς» везде заменяется на «*x*», а «квадрат» (Δ^{γ}), «куб» (K^{γ}) и т. д. – на *x* в соответствующей степени (x^2, x^3 и т. д.). С одной стороны, такая трактовка вполне соответствует использованию переменной *x* в алгебраических уравнениях в наше время. И именно эта, идущая от Диофанта традиция, привела к становлению современного понятия переменной, или неизвестной, величины. Но с другой стороны, в некоторых контекстах «ς» (и степени «Δ^{γ}», «K^{γ}» и т. д.) можно было бы трактовать и как параметры. Например, в таблице степеней и дробей («частей»)[3]. Впрочем, в полной мере различия между «переменными» и «параметрами» проявляются как раз в практике вычислений. В целом, история античной и доантичной «математики» с точки зрения появления тех или иных семиотических приемов нуждается в отдельном исследовании.

В Средние века использовались буквенные обозначения произвольных, но как бы известных чисел, т. е. арифметические параметры[4]. Но в целом, ситуация с буквенными обозначениями была похожа на позднеантичную и, с точки зрения различения переменных и параметров, нуждается в отдельном исследовании.

Видимо, первым, кто стал явно разделять переменные величины и параметры, и более или менее последовательно применять буквы для обозначения тех и других, был Виет в работе «In artem analyticam isagoge» (Введение в аналитическое искусство)[5]. Сложно сказать, насколько эти новшества Виета были известны его современникам и насколько они оказали влияние на последующее развитие алгебраической символики, поскольку в современную культуру эти обозначения вошли через Декарта. Именно Декарт в «Геометрии» 1637 г. ввел обозначение переменных (неизвестных) величин через *x*, *y*, *z*, а параметров (коэффициентов) – через *a*, *b*, *c*[6].

Явное и последовательное различение понятий переменной и некоторой произвольной величины (параметра) имело ряд потенциальных семиотических следствий. Во-первых, возникли условия для появления современных представлений о квантификации, что было бы мало вероятно при возможности трактовки «неизвестных» как некоторых «произвольных», а не «переменных» величин. Во-вторых, по мере

---

1 *Диофант Александрийский.* Арифметика и Книга о многоугольных числах / Пер. с древнегреч. *И. Н. Веселовского* / Ред. и коммент. *И. Г. Башмаковой*. М., 1974. С. 38.

2 *Diophanti Alexandrini.* Opera omnia cum Graecis commentaries / Ed. et Latine interpretatus est *P. Tannery*. Vol. I. Lipsiae [Leipzig],1893; Vol. II. Lipsiae, 1895.

3 *Диофант Александрийский.* Арифметика… С. 39.

4 Например, Леонардом из Пизы в «Liber abbaci» 1202 г. Ссылка по: *Cajori F.* A History of Mathematical Notations. Vol. II. Chicago, 1952. P. 2.

5 Издано в Tours в 1591 г. Ссылка по: *Cajori F.* History… P. 4–5. Упоминается также в *Башмакова И. Г., Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П.* Знаки… С. 350 ст. b – 351 ст. a.

6 Первое изд. (франц.): [*Descartes R.*]. La géométrie // [*Descartes R.*]. Discours de la methode. Leyde [Leyden], 1637. Первое отдельное изд. (лат.): *Cartes R. des.* Geometria. Lugduni Batavorum [Leyden], 1649. Так же об этом: *Cajori F.* History… P. 5; *Башмакова И. Г., Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П.* Знаки… С. 351 ст. a.

появления математических символов для операций, отношений и т. д. различение трех групп знаков, обозначающих числа, могло послужить (и, видимо, со временем послужило) в качестве «матрицы», порождающей аналогичные представления об обобщенных и переменных знаках операций, отношений и т. п.

4. Знаки для обозначения операций и понятие функции

Необходимо различать два процесса: во-первых, становление символьных и других условных обозначений для математических (арифметических) операций и, во-вторых, появление, развитие понятия функции как обобщения и, в некоторой степени модификации предшествующих представлений о математических операциях.

Ранняя история знаков для обозначения операций вызывает некоторые вопросы. Например, как трактовать диофантовы обозначения степеней неизвестного, поскольку «Δ^{γ}», «K^{γ}» и т. д. обозначают не саму операцию возведения в квадрат, куб и т. д., а уже ее итог: x^2, x^3 и т. д. Другой вопрос вызывают обозначения, использовавшиеся в XV в., для сложения и вычитания: $\bar{p}$ и $\bar{m}$. Трактовать ли их еще как сокращения (от *plus* и *minus*, соответственно), или же уже как символические обозначения? Мне кажется, что возможно второе решение, но этот вопрос нуждается в отдельном семиотическом анализе соответствующих текстов.

Современные обозначения сложения и вычитания через «+» и «–» впервые появляются, видимо, в XV в. в немецкой математической школе коссистов. В печати они впервые были использованы в учебнике Иоганна Видмана (*Widmann* или *Weidemann*) «Быстрый и удобный счёт для всех торговцев», изданном в 1489 г. в Лейпциге[1]. Любопытно, что, согласно мнению, видимо, А. П. Юшкевича[2], знак «+» происходит от знака «&» – лигатуры латинского союза «et» – ‘и’. Эта гипотеза связана с тем, что в немецком, как и в русском, древнегреческом, латинском и многих других европейских языках, операция сложения часто передается союзом ‘и’. Например, в древнегреческом: «ς ἄρα $\bar{\delta}$ χαὶ M̊ $\bar{\delta}$ ’ἴσοι M̊ $\bar{\pi}$» ($4x + 4 = 80$)[3]. То, что в знаке «+» уже не узнать ни сочетания букв «et», ни принятых для этого союза лигатур, а также, что речь идет о немецком тексте, где союз ‘и’ имеет форму «und», то это обозначение можно признать уже полноценным идеографическим знаком. Таким образом, если гипотеза Юшкевича верна, то это – первый зафиксированный случай массового перехода от словесной записи союза к его символическому, идеографическому обозначению. Причем, без какой-либо логической подоплеки[4].

Важным этапом становления классической математической онтологии (как и еще одной важной предпосылкой для развития учения о квантификации) стало формирования понятия функции. Согласно [Александрова 1978, с. 155], «на рубеже XVI–XVII в. функции в основном задавались словесно, графически, кинематически или таблично», и только Декарт и Ферма стали представлять зависимости между переменными посредством формул (ок. 1637 г.). Правда, нуждается в дополнительном

---

[1] *Widmann J.* Behende und hübsche Rechnung auff allen Kauffmanschafften. Leipzig, 1489 [unpaginiert].

[2] Высказано в: *Башмакова И. Г., Березкина Э. И. и др.* История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. *А. П. Юшкевича*. В 3-х тт. Т. 1. История математики с древнейших времен до начала Нового времени. М.: Наука, 1970. С. 290; и, более кратко, – в: *Башмакова И. Г., Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П.* Знаки… С. 350.

[3] *Diophanti Alexandrini.* Opera… P. 18.

[4] Можно назвать и другие, более близкие к логике случаи. Например, Ран в «Немецкой алгебре» (*Rahn J. H.* Teutsche Algebra. Zurich, 1659) обозначал логическое заключение, «ergo» значком «∴» или его перевернутым вариантом (стр. 72, 73, 83 и др.). С переводом книги Рана на английский язык (1668) использование значка «∴» и некоторых его производных достаточно широко распространяется в Британии, а потом и США для обозначения связок «therefore» и «because» (*Cajori F.* History… P. 281–283).

исследовании вопрос, насколько речь о функциях в XVI–XVII вв. является модернизацией, поскольку ни термина «функция», ни понятия функции в более или менее современном смысле в то время не было.

Термин «функция» (*function* – свершение, исполнение) вводится Лейбницем (в рукописях – с 1673 г., в печати – с 1692 г.). В широкое научное употребление термин входит несколькими десятилетиями позже: например, ни в издании 1716 г. «Математического лексикона» Хр. Вольфа[1], ни в первом расширенном издании «Полный математический лексикон» 1734 г.[2] этого термина еще нет, но он появляется в издании 1747 г.[3].

Первые обозначения функций, видимо, также принадлежат Лейбницу. В рукописях он использовал графические конструкции вида ‾‾|__|, в первой секции которых записывал переменные (разделяя их знаком «;»), а во второй – некоторые характеристики переменных и цифру, служащую для различения в тексте разных функций одних и тех же переменных[4]. В печатных же трудах Лейбниц использовал астрономические знаки, обозначая ими то алгебраические выражения (которые долго отождествлялись с функциями), то собственно функции, то аргументные места при знаках математических операций[5]. Впервые буквенные обозначения произвольных функций, видимо, использовали Иоганн и Якоб Бернулли; например, в работах, опубликованных в «Acta eruditorum» в 1694, 1695, 1697 гг.[6]. Эти обозначения И. Бернулли обсуждал с Лейбницем в переписке 1698 г. При этом, никто из троих не заключал аргументы функций в скобки. Впервые такая запись встречается у Л. Эйлера в работе 1734 г. в виде «$f(x/a + c)$». Это же и первый случай использования буквы «f» для обозначения функций (несколько ранее, в 1718 г. обозначение «φx» было использовано И. Бернулли). В случае с «$f(x/a + c)$», скобки необходимы для обозначения агрегации, что вызывает вопросы, можно ли их трактовать как знак применения функции к аргументу, как это делается в некоторых работах[7]. Только позже у Эйлера появляются записи, которые можно истолковать более однозначно: в 1753 г. – «$\Phi:(x, t)$»[8], а в 1754 г. – «$f:(a, n)$»[9]. В 1754 г. использование скобок как знак применения функции к аргументу также появляется у Д’Аламбера: «$\varphi(z)$», «$\Gamma(z)$», «$\varphi(z+\zeta)$» и др.[10].

Таким образом, понятие функции – отнюдь не само собой разумеющееся – формируется на протяжении XVII – отчасти XVIII вв., а способы обобщенной записи функций – с 90-х гг. XVII до 2-й пол. XVIII вв.

Еще раз подчеркну, что именно понятие функции как некоторой количественной зависимости между значениями двух или более «величин» сформировало современное понятие переменной и, если не потребовало, то создало условия для появления современных представлений о квантификации. Кроме того, понятие функции оказало влияние на появление понятия предиката (в современном логико-математическом

---

[1] *Wolff, Chr.* Mathematisches Lexicon. Leipzig, 1716.

[2] *Wolff, Chr.* Vollständiges Mathematisches Lexicon. Bd. 1. Leipzig, 1734.

[3] *Wolff, Chr.* Vollständiges Mathematisches Lexicon. Bd. 1. Leipzig, 1747. Sp. 539.

[4] *Cajori F.* History… P. 193, 268.

[5] *Cajori F.* History… P. 8, 191, 193 и др. Также: *Александрова Н. В.* Математические термины. М., 1978. С. 156.

[6] Здесь и далее – согласно: *Cajori F.* History… P. 267–268.

[7] Например, в: *Александрова Н. В.* Математические термины. С. 156; и: *Башмакова И. Г., Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П.* Знаки… С. 351.

[8] В указ. словаре «Математические термины» Н. В. Александровой (с. 156) эта запись приводится как «$\Phi = \Phi(x, t)$», но для рассматриваемого здесь аспекта символики это разночтение значения не имеет.

[9] *Cajori F.* History… P. 269.

[10] Ibid.

смысле) и способов обозначения предикатов.

5. Знаки для обозначения отношений и понятие предиката

Как и в случае с операциями и функциями, необходимо различить процесс становления представлений о математических отношениях и развития их символьных обозначений и процесс становления понятия предиката. Недостаток места и обширность затронутой темы не позволяют достаточно полно осветить развитие категорий даже только «дескриптивных» знаков логических языков. Поэтому лишь бегло коснусь здесь темы символизации обозначения отношений и понятия предиката.

Развитие символьных обозначений математических отношений в целом следует за становлением символьной записи сложных термов, хотя из-за растянутости процесса во времени и его распределенности эта последовательность не явна.

Отдельные случаи сокращенного обозначения тех или иных математических отношений можно найти в античности и в Средние века. В III в. Папп вроде бы использовал знак вида «=» для обозначения параллельности[1]. В 1557 г. Рекорд в книге «The Whetstone of Witte» использует подобный значок для обозначения арифметического равенства[2]. Но еще на протяжении XVIII в. широко использовалась словесная запись (иногда полная, иногда сокращенная) для этого отношения, и только к концу века знак «=» получает относительно широкое распространение в качестве знака равенства. Но и позже, в 1-й пол. XIX в. используются альтернативные символьные обозначения равенства. Символьные обозначения других арифметических отношений постепенно появляются следом, в XVII–XIX вв., но вплоть до XIX в. в их использовании наблюдается значительный разнобой.

Таким образом, постепенное развитие и распространение символьных обозначений для отношений, а до и отчасти параллельно с этим для функций, не создавало до XIX в. базы для возникновения математической рефлексии над понятием отношения, для появления обобщенной записи отношений и для формирования понятия предиката (в современном логико-математическом смысле). Этот этап был уже более тесно связан с развитием математической логики.

Здесь я укажу только на два этапа этого пути. Г. Фреге переинтерпретировал понятия свойства и отношения как некоторого рода функции[3]. За счет этого впервые (1) в одну категорию были объединены свойства и отношения, (2) была введена для них обобщенная запись, (3) появилась идея о функциональной (и, соответственно, как частный случай, предикатной) переменной. У Фреге также впервые появляется операция, похожая на современную квантификацию.

Другой важной фигурой был Дж. Пеано, который в своей системе 1897 г. аксиом пропозициональной логики использовал понятие зависимости высказывания от одной или нескольких переменных[4], что, по сути, было гораздо ближе понятию предиката.

Формирование современных представлений о логических связках и кванторах более тесно связано с имевшими место попытками математизации логики, но и здесь история выходит далеко за рамки этих попыток, в область обычной математической работы. Но рассмотрение процессов становления соответствующих понятий и способов обозначения требует отдельного исследования.

---

[1] *Александрова Н. В.* Математические термины. С. 92.
[2] Там же. С. 116.
[3] *Фрег*е Г. Логика…
[4] *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М., 1967. С. 450–451.